Platonische Körper und dichteste Kugelpackungen - Raumsymmetrie in der Schule (mit POV-Ray)

Regionale Lehrerfortbildung an der Universität Passau
„Symmetrie schadet nie“

20. Dezember 2011

Prof. Dr. Matthias Brandl
Professur für Didaktik der Mathematik
Lehr- und Forschungseinheit ‚Lehramtsausbildung Mathematik und Informatik‘
Fakultät für Informatik und Mathematik
Universität Passau

UNIVERSITÄT PASSAU
Fakultät für Informatik und Mathematik

Raumvorstellung

„**Raumvorstellung** kann umschrieben werden als die Fähigkeit, in der Vorstellung räumlich zu sehen und räumlich zu denken.“

Synonyme:

Räumliches Vorstellungsvermögen
Raumvorstellungsvermögen

Wölpert, H. (1983). Materialien zur Entwicklung der Raumvorstellung im Mathematikunterricht. *Der Mathematikunterricht, 6,* 9.

Geometrieunterricht in der Kritik

- Studien belegen:
  - Raumvorstellung und Raumgeometrie spielen im Geometrieunterricht eine untergeordneten Rolle
  - Schwerpunkt liegt auf 2-dimensionaler Geometrie
  - in der Raumgeometrie dominieren Berechnungen
  - formenkundliche und zeichnerische Inhalte werden stark vernachlässigt

Maier, P.H. (1997). Raumvorstellung schulen – Geometrische Körper selber bauen. *Beiträge zum Mathematikunterricht,* 347-350.
Maier, P.H. (1999). Raumgeometrie mit Raumvorstellung – Thesen zur Neustrukturierung des Geometrieunterrichts. *Der Mathematik-unterricht, 45(3),* 4-17.

Empirische Befunde zum räumlichen Vorstellungsvermögen

- Ein gutes räumliches Vorstellungsvermögens ist nur zum Teil angeboren und …
- … muss im Verlauf der weiteren Entwicklung erlernt werden.
- Bei Grundschulkindern in Grundzügen ausgebildet;
- Bis zum Alter von 9 – 10 Jahren sind ungefähr 50% und bis zum Alter von 12-14 Jahren ungefähr 80% der Raumvorstellungsfähigkeit, (bezogen auf die Leistung von Erwachsenen) entwickelt.

⇨ Förderung im Unterricht sinnvoll und wichtig!

Maier, P.H. (1996). Die Trainierbarkeit der Raumvorstellung in der Hauptschule. Pädagogische Welt, 50(2), 50-54.
Maier, P.H. (1996). Ist das räumliche Vorstellungsvermögen trainierbar? Grundschule, 3, 9-11.
Wölpert, H. (1983). Materialien zur Entwicklung der Raumvorstellung im Mathematikunterricht. *Der Mathematikunterricht, 6,* 7-42.

Training des räumlichen Vorstellungsvermögens

- Räumliches Vorstellungsvermögen kann man trainieren (in jedem Alter)
- Studien belegen: Training, das auf handlungsorientierten Aktivitäten mit Modellen und Medien basiert, zeigt starke bis sehr starke Effekte.

Maier, P.H. (1996). Die Trainierbarkeit der Raumvorstellung in der Hauptschule. Pädagogische Welt, 50(2), 50-54.

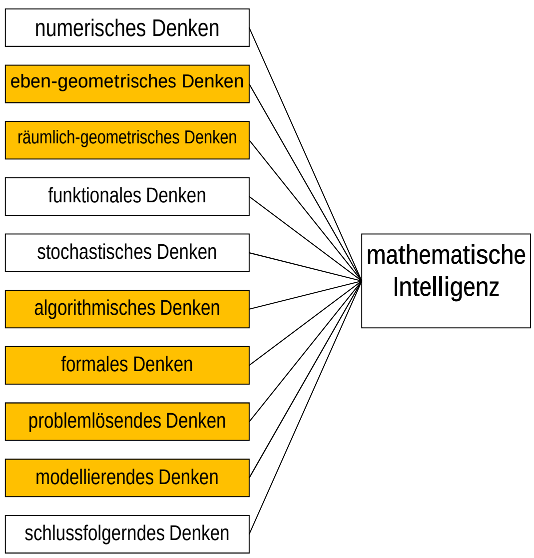
Umsetzung im Unterricht

- Trainingskonzept muss motivierend und zeitlich angemessen sein
- Inhalte müssen echten räumlichen Charakter haben
- Schwerpunkt bei der Einführung neuer Körper auf deren räumlichen Eigenschaften (nicht auf neuen Bezeichnungen)
- innerhalb der Raumgeometrie: formenkundliche und zeichnerische Inhalte in den Vordergrund stellen (nicht so sehr Berechnungen)
- Verwendung von Modellen und anderen Medien

Maier, P.H: (1996). Kopfgeometrie – Handlungsorientierte und visuelle Aufgabenstellungen. *Mathematik in der Schule, 34,* 276-284.
Maier, P.H. (1997). Raumvorstellung schulen – Geometrische Körper selber bauen. *Beiträge zum Mathematikunterricht,* 347-350.
Maier, P.H. (1999). Raumgeometrie mit Raumvorstellung – Thesen zur Neustrukturierung des Geometrieunterrichts. *Der Mathematik-unterricht, 45(3),* 4-17.

„ Geometrie mit POV-Ray – platonische Körper und dichteste Kugelpackungen“

(ab Mittelstufe)

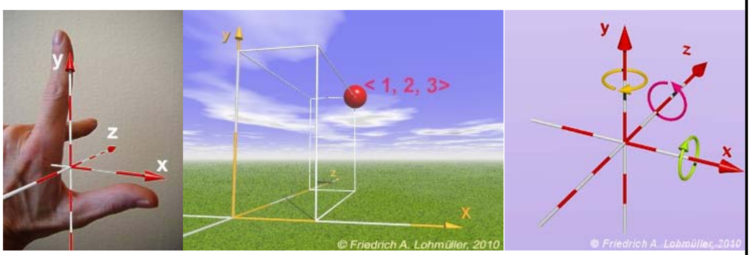


Material bei Lehrer-Online

- http://www.lehrer-online.de/platonische-koerper-povray.php
- Arbeitsblatt

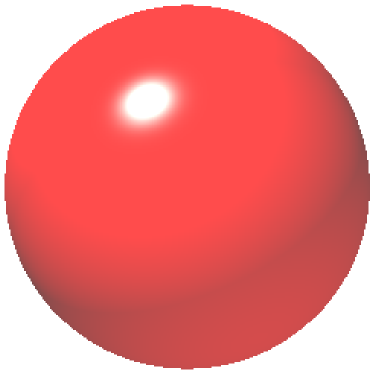
POV-Ray

- Kostenfreie Software von http://www.povray.org/
- Diverse ausführliche Online-Anleitungen
  - Seiten von Prof. A. Filler
  - Wikipedia
  - Homepage von A. u. F. Lohmüller
- Ausgangspunkt: Basisdatei `basis.pov`
- Arbeitsblätter
  - Aufgaben
  - Platon



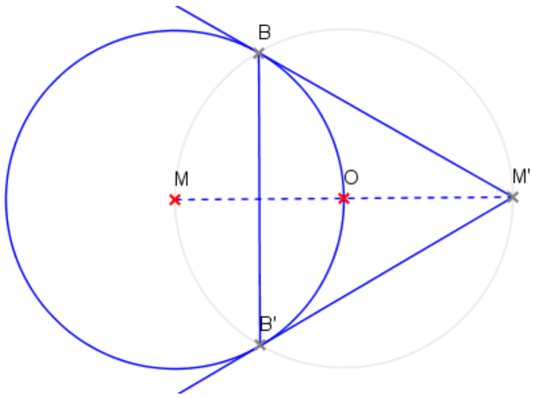
Quelle: http://www.f-lohmueller.de/pov_tut/basic/povkurs2.htm#xyzKoordinaten

Einheitskugel (a, b): `sphere{}`



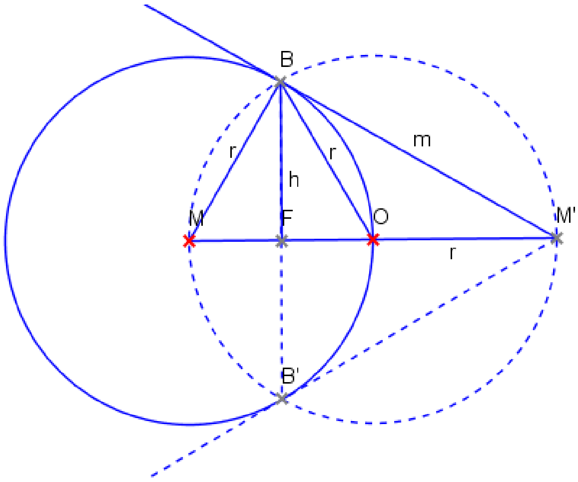
Tangenten an die Kugel: Kegelhütchen (c bis f)

- M‘(0|1|0)
- M(0|-1|0) jetzt neuer Kugelmittelpunkt
- Tangenten von M‘ aus: Thaleskreis
- Schnittebene:

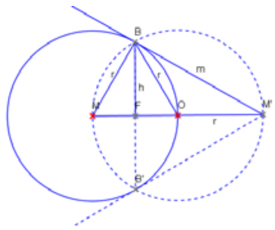


Mantelfläche und Volumen (f)

- Schnittebene:



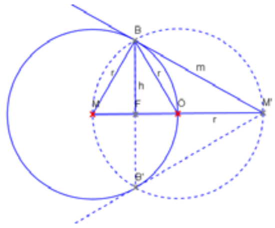
Mantelfläche



- Δ MM'B:
  - rechter Winkel bei B, $\overline{MM'} = 2r = 2 \quad \overline{MB} = r = 1$
  - Also: $m = \overline{BM'} = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{3} \cdot r = \sqrt{3}$
- Höhe h im Δ MOB als Radius der Grundfläche:
  - $\overline{MB} = r, \overline{OB} = r, \overline{MO} = r \Rightarrow \Delta MOB \text{ gleichseitig} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} r$
  - Also:

$$M = h\pi m = \frac{\sqrt{3}}{2} r\pi\sqrt{3}r = \frac{3}{2}\pi r^2 = \frac{3}{2}\pi \cdot 1 = 1{,}5 \cdot \pi$$

Volumen

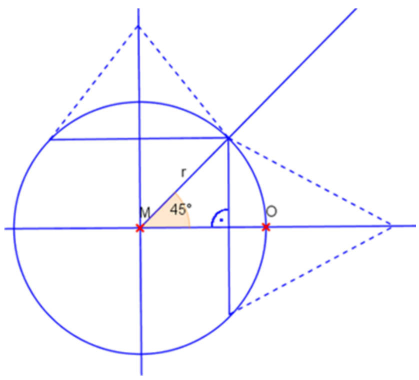


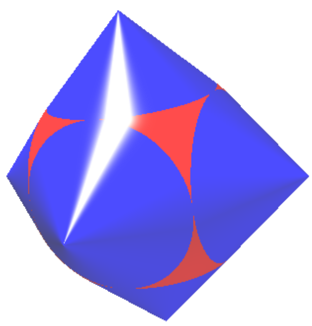
- Δ MOB ist gleichseitig:
  - F ist Mittelpunkt von [MO]
  - Also: $\overline{MF} = \overline{FO} = \frac{r}{2} \qquad \Rightarrow H = \overline{FM'} = \overline{FO} + \overline{OM'} = \frac{r}{2} + r = \frac{3}{2}r$
  - Also:

$$V = \frac{1}{3}GH = \frac{1}{3}h^2\pi H = \frac{1}{3}\frac{3}{4}r^2\pi\frac{3}{2}r = \frac{3}{8}\pi r^3 = \frac{3}{8}\pi\cdot 1^3 = 0{,}375\pi$$

Bedeckung der Oberfläche (g, h)

- Aufsetzen von 6 identischen Kegelhütchen, die die Kugeloberfläche überlappungsfrei bestmöglich bedecken.



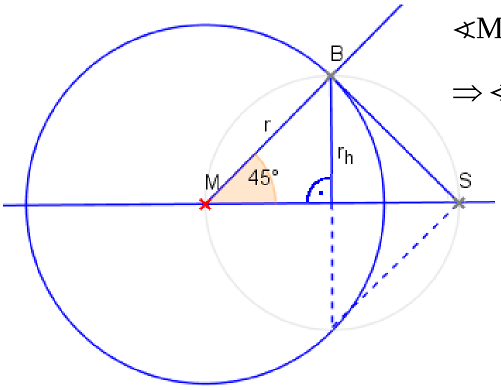


$$r_H = r\cdot\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}r = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

cone{}

Kombination (i, j)

- „Bestmögliche“ Bedeckung der Oberfläche
- Mantellinien sind Tangenten an die Kugel



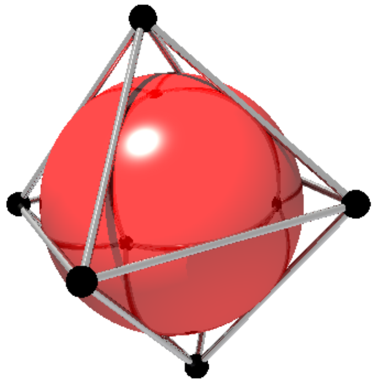
$\sphericalangle MBS = 90°, \sphericalangle SMB = 45°$

$\Rightarrow \sphericalangle BSM = 180° - 90° - 45° = 45°$

Δ MSB gleichschenklig

$m = \overline{BS} = r = 1$

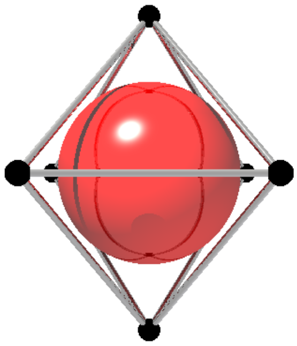
Oktaeder mit Seitenlänge 2 (j, k)



`cylinder{}`

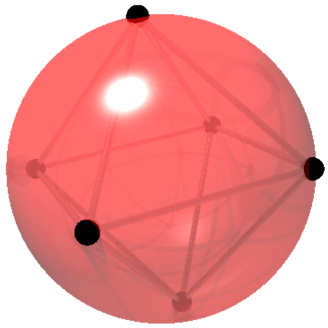
Variationen (l, m)

„Inkugel“



$$R = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

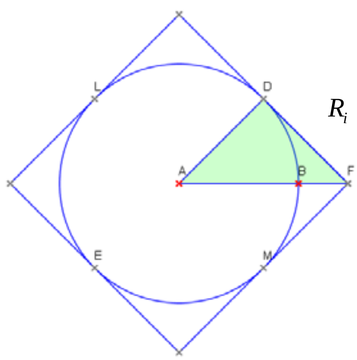
„Umkugel“



$$R = \sqrt{2}$$

Begründung „Inkugel“

- Berührung der Seitenflächen von innen
- Wegen Symmetrie: Berührpunkt ist Mittelpunkt oder Schnittpunkt der Höhen der Seitenflächen (gls. Dreiecke)???



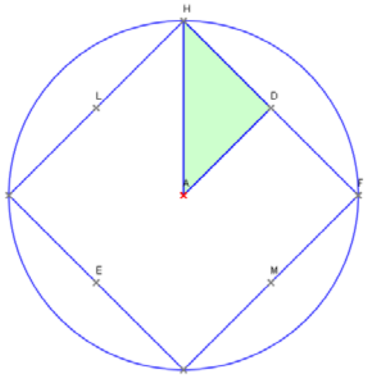
$$\overline{FD} = \frac{1}{2} h_\Delta$$

$$R_i = \overline{FD} = \frac{1}{2} h_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2m = \frac{\sqrt{3}}{2} r = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Skizze bzw. Ansatz gilt <u>nur</u> für Berührung der Kanten!

Begründung „Umkugel“

- Berührung der Ecken



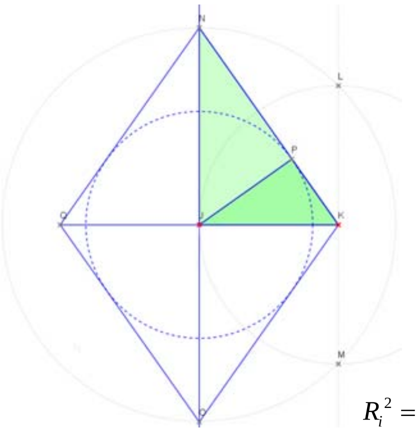
$$\overline{DH} = m = r = 1$$

$$\overline{AD} = r = 1$$

$$\overline{AD} = \overline{HD} = r = 1$$

$$R_u = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2} \cdot r = \sqrt{2}$$

Begründung „Inkugel“



$$\overline{JN} = R_u = \sqrt{2} \qquad \overline{JK} = 1$$

$$\overline{KN} = h_\Delta = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

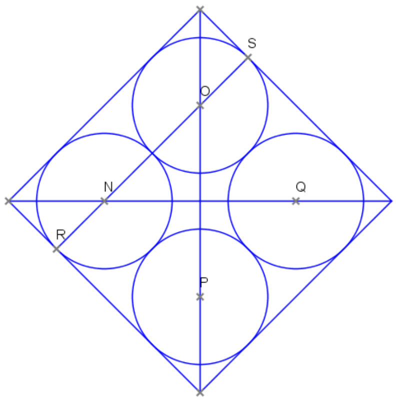
Kathetensatz in Δ JKN:

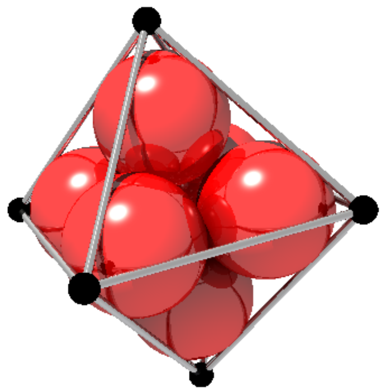
$$1^2 = \overline{KP} \cdot \sqrt{3}, \quad \text{also} \quad \overline{KP} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h_\Delta}{3}$$

Pythagoras in Δ JKP:

$$R_i^2 = \overline{JP}^2 = \overline{JK}^2 - \overline{KP}^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2, \quad \text{also} \quad R_i = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Ausfüllen mit 6 Kugeln (n, o)





4R=2m, also: $R = \frac{m}{2} = \frac{r}{2} = \frac{1}{2}$

„Dichteste Kugelpackung“ (p)

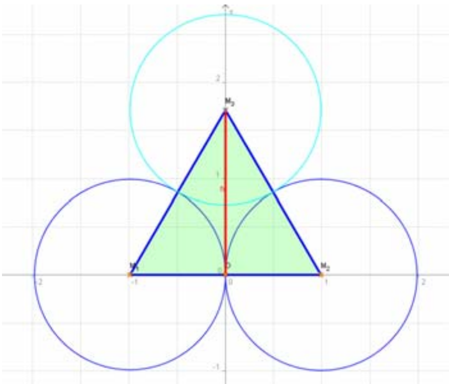
- Wikipedia
- Zeit online
- Mathematik.de (DMV)
- T. Hales:
  - Überblick
  - T. Hales (2012)
- G. Szpiro (2011). „Die Keplersche Vermutung: Wie Mathematiker ein 400 Jahre altes Rätsel lösten.“ Springer
- E. Behrends (2006). „39. Beweise mit dem Computer?“ in „Fünf Minuten Mathematik“, Wiesbaden: Vieweg, S. 102/103.

Thomas C. Hales

Dichteste Kugelpackung (q)

- Unterste Lage, Blick von oben:

$M_1(1|0|0),\;\; M_2(-1|0|0),\;\; M_3(3|0|0),\ldots$



x_3-Koordinate aus der Höhe des gleichseitigen Dreiecks $\Delta M_1 M_2 M_3$

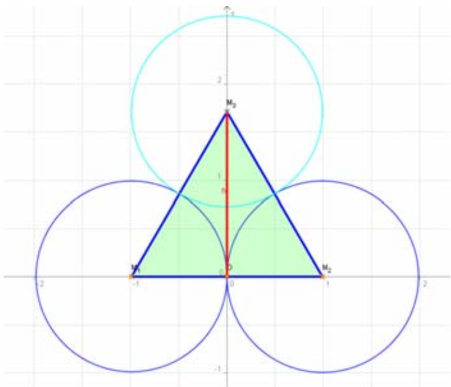
$$x_3 = h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3} \approx 1{,}732$$

POV-Ray-Code

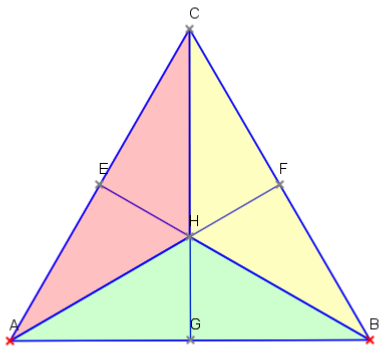
```
//unterste Lage
#declare koerper1=

union{

sphere{<1,0,0>, 1}
sphere{<-1,0,0>, 1}
sphere{<3,0,0>, 1}
sphere{<-3,0,0>, 1}

sphere{<0,0,sqrt(3)>, 1}
sphere{<-2,0,sqrt(3)>, 1}
sphere{<2,0,sqrt(3)>, 1}

sphere{<1,0,2*sqrt(3)>, 1}
sphere{<-1,0,2*sqrt(3)>, 1}

sphere{<0,0,3*sqrt(3)>, 1}

texture{pigment{color rgb<1,0,0> transmit 0.5}
                finish { phong 1 reflection 0.2}
               }
      }
```

Dichteste Kugelpackung II

- **2. Lage**: analog, andere Maße
- Aus Symmetriegründen:
  - Mittelpunkt ist Tetraederspitze
  - Höhenfußpunkt bei (Inkreis-/Umkreis-) Mittelpunkt: bei Drittel der Höhe in der Grundfläche ($x_3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$)



Inkreisradius im gleichseitigen Dreieck



Aus Symmetrie:

$$A_{\Delta,gruen} = A_{\Delta,rot} = A_{\Delta,gelb}$$

$$A_{\Delta} = 3 \cdot A_{\Delta,gruen}$$

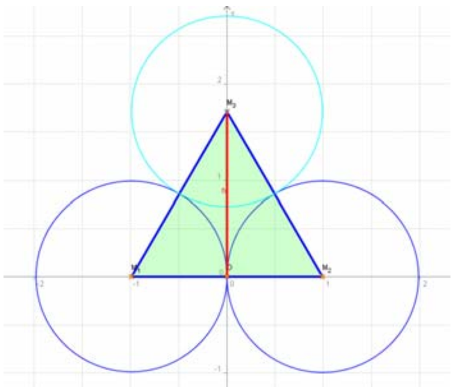
Gleiche Grundlinie, also ein Drittel der Höhe.

$$\frac{1}{2} a h_{\Delta} = A_{\Delta} = 3 \cdot A_{\Delta,gruen} = 3 \cdot \frac{1}{2} a h_{\Delta,gruen}$$

$$h_{\Delta} = 3 \cdot h_{\Delta,gruen}$$

Dichteste Kugelpackung II

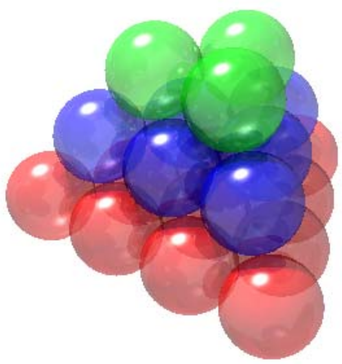
- **2. Lage**: analog, andere Maße
- Aus Symmetriegründen:
  - Mittelpunkt ist Tetraederspitze
  - Höhenfußpunkt bei einem Drittel der Höhe in der Grundfläche ($x_3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$)
  - Höhe des Tetraeders mittels Pythagoras:



$$h_T^2 = h_\Delta^2 - \left(\frac{1}{3}h_\Delta\right)^2 = \frac{8}{9}h_\Delta^2 = \frac{8}{9}\left(\sqrt{3}\right)^2 = \frac{8}{3} \qquad x_2 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Dichteste Kugelpackung III

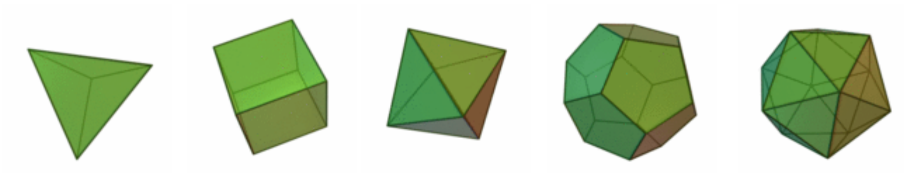
- Kugelmittelpunkte der **3. Lage** bzgl. x_1-Koordinate wie 1. Lage, doppelt so hoch bzgl. x_2 und doppelt so weit verschoben bzgl. x_3



Die Platonischen Körper (r)

- Wie viele Platonische Körper gibt es?

Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder



4 gleichseitige Dreiecke	6 Quadrate	8 gleichseitige Dreiecke	12 regelmäßige Fünfecke	20 gleichseitige Dreiecke

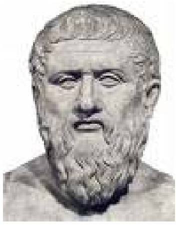
(Bildquelle: Wikipedia)

Euklid (4. Jh. V. Chr.): Elemente (Buch XIII)

(§ 18a).

Weiter behaupte ich, dass sich außer den besprochenen Fünf Körpern kein weiterer Körper errichten lässt, der von einander gleichen gleichseitigen und gleichwinkligen Figuren umfasst würde.
Aus 2 Dreiecken oder überhaupt ebenen Flächen lässt sich keine Ecke errichten; aus 3 Dreiecken die der Pyramide, aus 4 die des Oktaeders, aus 5 die des Ikosaeders. Eine Ecke aus 6 gleichseitigen und gleichwinkligen Dreiecken, die an einem Punkt zusammengesetzt wären, kann es nicht geben; denn da der Winkel des gleichseitigen Dreiecks 2/3 R. beträgt, würden die 6 zusammen = 4 R.; dies ist unmöglich, denn jede Ecke wird von Winkeln umfasst, die zusammen < 4 R. (XI, 21). Aus demselben Grunde lässt sich auch aus mehr als 6 (solchen) ebenen Winkeln keine Ecke errichten. Von 3 Quadraten wird die Würfelecke umfasst; mit 4 ist es unmöglich, denn sie gäben wieder 4 R. Bei gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecken wird von 3 die Dodekaederecke umfasst. Mit 4 ist es unmöglich; denn da der Winkel des gleichseitigen Fünfecks 1 1/5 R. beträgt, würden die 4 Winkel zusammen > 4 R.; dies ist unmöglich. Wegen desselben Widerspruchs kann auch von anderen Vielecken keine (verwendbare) Ecke umfasst werden.

Platons Sicht der Geometrie (s)



„Mit den dreizehn Büchern der „Elemente“ des hellenistischen Mathematikers Euklid von Alexandria (365? Bis 300? v. Chr.) tritt uns das erfolgreichste Werk der mathematischen Weltliteratur entgegen. In meisterhafter Darstellung vereinigte und systematisierte Euklid das gesamte mathematische Wissen seiner Zeit mit Ausnahme der Anwendungen der Mathematik; dies deswegen, da er vermutlich der Philosophie Platons nahegestanden hat.“

(Wolfgang Trageser in seiner Einleitung zur deutschen Übersetzung von Euklids Elementen durch Clemens Thaer (Verlag Harri Deutsch, Frankfurt a. M. 1996) im November 1995)

„Kein der Geometrie Unkundiger möge hier eintreten.“ (AB)

- Inschrift über dem Eingang zu Platons Akademie in Athen
- Mathematik hatte einen hohen Stellenwert
- Neben Arithmetik als erstem Lehrfach wurde nämlich Geometrie als zweites Lehrfach festgelegt
- Zitat aus „Der Staat“, 7. Buch, Abschnitt 9; Unterhaltung zwischen Sokrates („ich“) und Platons Bruder Glaukon („er“)

„Aristophanes erklärt, der Mensch sei ursprünglich ein vierbeiniges, rundes Tier mit zwei Gesichtern gewesen. Aus Ärger über den Hochmut dieses Tiers habe Zeus beschlossen, dem Menschen Demut beizubringen: ‚Der Mensch soll weiter existieren, aber ich werde ihn in der Hälfte teilen, um seine Kraft zu verringern und seine Zahl zu erhöhen; das wird auch den Vorteil haben, seinen Nutzen für uns zu erhöhen.' Und damit schnitt er alle Menschen entzwei. Dies war Aristophanes zufolge der Ursprung der Liebe – die Sehnsucht des Menschen, wieder zu einem vollständigen Wesen, zu einem vollkommen symmetrischen Körper zu werden."

(du Sautoy, Marcus, 2008. *Das Geheimnis der Symmetrie*. Beck, dtv. München, S. 77)

Geheim… ur der Materie

- Aristophanes: Sym… ie als Antwort im Wettbewerb zur besten Antwort auf die Frage nach dem Ursprung der Liebe

Die Eulersche Polyederformel (t)

- Für die Anzahl E der Ecken, die Anzahl F der Flächen und die Anzahl K der Kanten eines konvexen Polyeders (= „frei von Einbuchtungen") gilt immer:

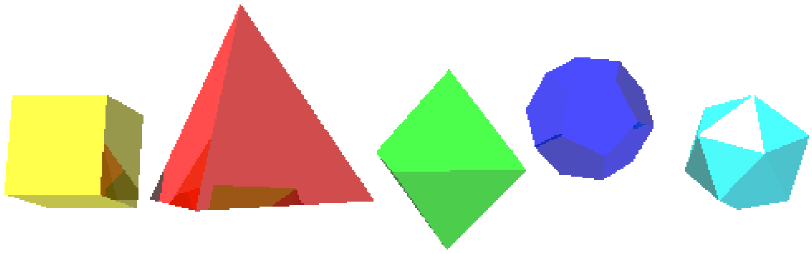
$$E + F - K = 2$$

- Für die platonischen Körper gilt z.B.:

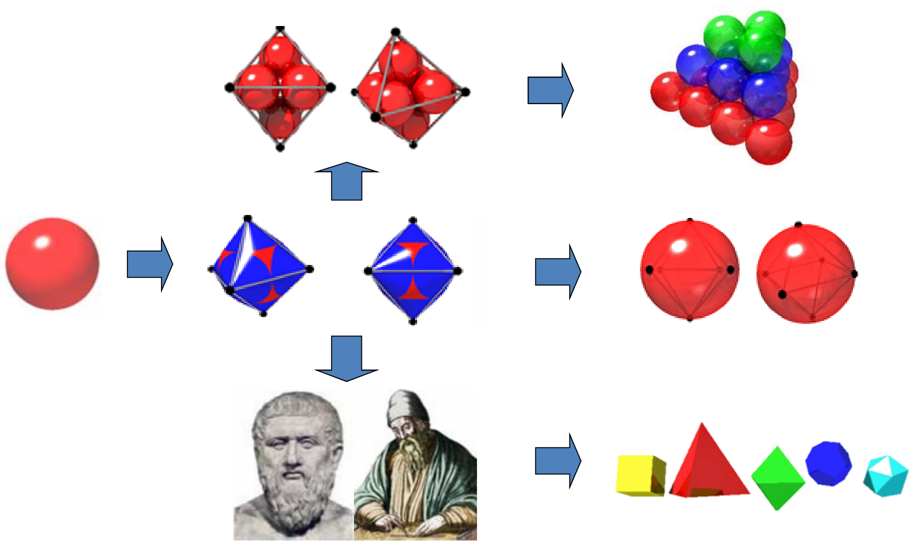
Polyeder	E	F	K	E + F – K
Tetraeder	4	4	6	2
Würfel	8	6	12	2
Oktaeder	6	8	12	2
Dodekaeder	20	12	30	2
Ikosaeder	12	20	30	2

Platonische Körper in POV-Ray (u)

- Fertige Körper in Bibliothek `shapes2.inc`: *Tetrahedron, Cube, Octahedron, Dodecahedron, Icosahedron*

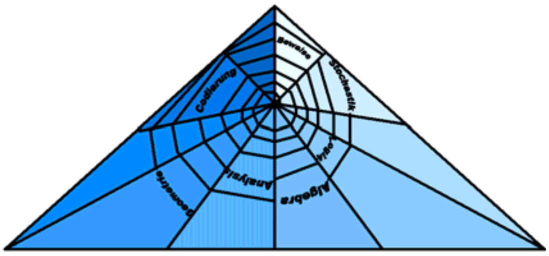


Zusammenfassung



RLFB des GDM-AK „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ am 28.04.2012

(http://www.math-edu.de/Vernetzungen.html)



Tagungen des GDM-Arbeitskreises Vernetzungen im Mathematikunterricht

4. Tagung 2012 in Passau (27.–28. April) Organisation: Matthias Brandl

3. Tagung 2011 in Berlin (13.–14. Mai), Organisation: Andreas Filler, Katharina Klembalski, Swetlana Nordheimer

2. Tagung 2010 in Linz (30. April – 01. Mai), Organisation: Jürgen Maaß

1. Tagung 2009 in Dortmund (23.–24. Oktober), Organisation: Astrid Brinkmann